GÖDEL

PROVA ONTOLOGICA DELL'ESISTENZA DI DIO

Se Dio è possibile, allora esiste necessariamente.

Ma Dio è possibile.

Quindi esiste necessariamente.

Località: Europa - USA

Epoca: 1906-1978

Indice

Vita di Gödel

Opere di Gödel

La prova ontologica dell'esistenza di Dio

La dimostrazione

Vita di Gödel

La formazione (1906-1930)

1906 - Il 28 aprile Kurt Gödel nasce a Brünn, odierna Brno, in Moravia, che all'epoca faceva parte dell'Impero Austro-Ungarico. La famiglia era di origine tedesca. Il padre era un imprenditore del settore tessile.

1918 - In seguito alla costituzione della Repubblica ceca diventa cittadino cecoslovacco.

1924 - Inizia a studiare all'Università di Vienna fisica, matematica e filosofia.

1925 - Inizia a frequentare il Circolo di Vienna, a cui partecipavano filosofi e scienziati tra cui Carnap, Quine, Tarski, Neurath, Menger.

1929 - Prende la cittadinanza austriaca.

1930 - Ottiene il dottorato in matematica con una tesi in cui dimostra la completezza della logica del primo ordine (Teorema di completezza di Gödel).

Tra Vienna e Princeton (1930-1940)

1930 - Pubblica *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalcüls* (*La completezza degli assiomi del calcolo funzionale logico*).

1931 - Pubblica i teoremi di incompletezza nell'articolo *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme (Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e di sistemi affini)*.

1932 - Ottiene la libera docenza.

1933 - Insegna all'Institute of Advanced Study di Princeton nel New Jersey, su invito di von Neumann. Incontra Einstein di cui diviene amico.

1934 - Effettua una serie di lezioni allo IAS di Princeton.

1935 - Nell'autunno visita lo IAS di Princeton.

1938 - Si sposa con Adele Porkert.

1938 - In seguito all'annessione dell'Austria alla Germania diviene cittadino tedesco.

1938 - Nell'autunno è allo IAS di Princeton.

1939 - In primavera è alla University of Notre Dame, università cattolica nello Stato dell'Indiana.

Periodo di Princeton (1940-1978)

1940 - A trentaquattro anni si trasferisce negli Stati Uniti per insegnare allo IAS di Princeton.

1940 - Scrive *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory.*

1946 - Diviene membro permanente dello IAS di Princeton.

1948 - Ottiene la cittadinanza statunitense.

1953 - Diviene professore ordinario allo IAS di Princeton.

1962 - Scrive *On Formally Undecidable Propositions*

1976 - Diviene professore emerito dello IAS di Princeton.

1978 - Il 14 gennaio muore a Princeton. Aveva settantadue anni.

Opere di Gödel

Gödel è entrato nella storia del pensiero grazie ai suoi fondamentali risultati nel campo della logica matematica.

A Gödel si deve il teorema di completezza della logica del primo ordine: In ogni teoria formalizzata al primo ordine sono teoremi tutte e sole le conseguenze logiche degli assiomi.

A Gödel si devono anche i teoremi di incompletezza:

> Primo teorema di incompletezza: Se un sistema assiomatico è coerente, ovvero da esso non si possono dedurre un'affermazione e la sua negazione contemporaneamente, allora il sistema è sintatticamente incompleto, ovvero esistono affermazioni sintatticamente corrette che non sono né dimostrabili né confutabili.
>
> Secondo teorema: se un sistema assiomatico è coerente allora la coerenza del sistema non è dimostrabile all'interno del sistema stesso. Non è quindi possibile dimostrare l'assenza di contraddizioni logiche restando all'interno del sistema assiomatico.

Gödel si interessò inoltre di teoria degli insiemi, del rapporto tra mente e macchina e della teoria della relatività.

Le opere di Gödel sono state raccolte in cinque volumi di *Collected Works* pubblicati a cura di S. Feferman, J.W. Dawson, W. Goldfarb, Ch. Parsons, R. N. Solovay da Oxford University Press.

- Vol. 1 - Works 1929-1936
- Vol. 2 - Works 1938-1974
- Vol. 3 - Unpublished essays and lectures
- Vol. 4 - Correspondence A-G
- Vol. 5 - Correspondence H-Z

La prova ontologica dell'esistenza di Dio

Le prove dell'esistenza di Dio

Le prove dell'esistenza di Dio si distinguono in prove *a priori* e prove *a posteriori*.

Le prove *a priori* non dipendono dalla esperienza (ovvero da informazioni provenienti dalle caratteristiche contingenti del mondo attuale), ma dalla pura ragione.

Le prove *a posteriori* dipendono da un appello all'esperienza (ovvero da informazioni provenienti dalle caratteristiche contingenti del mondo attuale).

La prova ontologica dell'esistenza di Dio in Anselmo d'Aosta

La prova ontologica dell'esistenza di Dio venne proposta per la prima volta da Anselmo d'Aosta.

Dio è "Ciò di cui non possiamo pensare nulla di maggiore".

Quando si sente "Ciò di cui non possiamo pensare nulla di maggiore" si comprende ciò che si sente.

Ciò che si comprende è nell'intelletto, anche se non si comprende il suo essere.

Occorre distinguere: altro è che una cosa sia nell'intelletto, altro è comprendere che una cosa esista.

"Ciò di cui non possiamo pensare nulla di maggiore" non può essere solo nell'intelletto.

Se infatti fosse nel solo intelletto, si potrebbe pensare qualcosa che fosse anche esistente nella realtà; e questo qualcosa sarebbe maggiore di qualcosa esistente solo nell'intelletto.

Se "ciò di cui non possiamo pensare nulla di maggiore" fosse solo nell'intelletto, "ciò di cui non possiamo pensare nulla di maggiore" sarebbe "ciò di cui possiamo pensare il maggiore" . E questa è una contraddizione.

Quindi "ciò di cui non possiamo pensare nulla di maggiore" esiste senza dubbio nell'intelletto e nella realtà.

La prova ontologica dell'esistenza di Dio in Cartesio

La prova ontologica di Anselmo d'Aosta venne contestata da Tommaso d'Aquino.

Fu accettata, con un leggera coloritura, da Duns Scoto, ed infine venne ripresa da Cartesio.

Certamente esiste in noi l'idea di un ente sommamente perfetto non meno della idea di qualunque figura o numero.

E non meno chiaramente e distintamente comprendiamo come alla sua natura appartiene di esistere sempre, come ciò che si dimostra di qualche figura o numero appartiene alla natura della figura o del numero.

Quindi l'esistenza di Dio deve essere in noi per lo meno con stesso grado di certezza delle verità matematiche.

Noi siamo abituati a distinguere in tutte le altre cose l'esistenza dall'essenza, per cui ci persuadiamo facilmente che si possa separare anche in Dio l'esistenza dalla essenza, e quindi di poter pensare Dio come non esistente.

Ma se si esamina la cosa con più attenzione risulta manifesto che non possiamo separare l'esistenza dalla essenza di Dio.

Dal fatto che non possiamo pensare Dio se non esistente segue che l'esistenza sia inseparabile da Dio, e che pertanto Dio esiste effettivamente.

E non è il nostro pensiero che compie questo collegamento tra esistenza ed essenza, e neppure è il pensiero ad imporre alle cose una qualche necessità; ma al contrario è la necessità della cosa stessa, ossia l'esistenza di Dio, a determinare il mio pensiero a pensare in questo modo.

Non siamo liberi di pensare Dio senza esistenza, ossia un essere sommamente perfetto senza la somma perfezione.

E non si deve nemmeno dire che si deve porre Dio come esistente dopo che abbiamo posto che Dio deve avere tutte le perfezioni, e l'esistenza è una di esse.

Infatti, sebbene non sia necessario che noi si pensi qualcosa di Dio, tuttavia ogni qual volta ci capita di pensare ad un ente primo e sommo, e di tirare fuori la sua idea dal tesoro della nostra mente, è necessario attribuire a Dio tutte le perfezioni, sebbene non le enumeriamo tutte in quel momento, e non facciamo attenzione a ciascuna di esse.

E questa necessità è sufficiente per concludere rettamente quando riconosciamo successivamente che l'esistenza è una perfezione e che l'ente primo e sommo esiste.

La prova ontologica dell'esistenza di Dio in Leibniz

Leibniz trattò nei suoi scritti più volte della prova ontologica sostenendo che sia la versione di Anselmo d'Aosta che quella di Cartesio erano incomplete. E pertanto diede una sua nuova versione.

Perfezione è una qualità semplice e assoluta, ossia che, qualunque cosa esprima, la esprime senza alcun limite.

Una qualità di questo tipo è semplice, pertanto è irresolubile ed indefinibile; altrimenti o non sarebbe una qualità semplice, ma un aggregato di più qualità, o sarebbe una qualità, ma circoscritta entro dei limiti, e quindi sarebbe compresa attraverso negazioni, contro l'ipotesi di essere puramente positiva.

Per Leibniz tutte le perfezioni sono compatibili tra loro e possono esistere nello stesso soggetto.

Leibniz procede alla dimostrazione per assurdo, ossia ponendo come vera la negazione della compatibilità.

Supposto che due perfezioni A e B siano incompatibili risulta evidente che la tesi non si può dimostrare senza risoluzione di uno o di entrambi i termini A e B. Altrimenti la loro natura non potrebbe essere sottoposta a ragionamento e l'incompatibilità di essi e di qualunque altra cosa non potrebbe essere dimostrata. Ma per ipotesi sono irresolubili. Quindi la proposizione dell'incompatibilità non può essere dimostrata.

Inoltre questa proposizione non è per sé vera. Ora tutte le proposizioni necessariamente vere sono o dimostrabili o per sé note. Quindi questa proposizione non è necessariamente vera. Perciò tutte le perfezioni sono compatibili nello stesso soggetto.

Se è possibile che tutte le perfezioni siano nello stesso soggetto, allora è possibile pensare il soggetto di tutte le perfezioni, ossia l'Essere perfettissimo.

Ma l'esistenza è una delle perfezioni e pertanto l'Essere perfettissimo esiste.

Cartesio aveva supposto che l'Essere perfettissimo potesse essere pensato, ossia fosse possibile.

Leibniz ammette che se l'Essere perfettissimo fosse possibile allora esisterebbe, ma prima bisogna dimostrare che sia nella nostra potestà ipotizzare un tale Essere, che una tale nozione sia *a parte rei*, che possa essere pensata chiaramente e distintamente senza contraddizione.

Per Leibniz Dio necessariamente esiste, se il suo essere è possibile.

Dio deve esistere necessariamente perché non è impossibile che Dio sia.

Dio è un Essere per sé, *ens a se*, ossia esiste per la sua essenza. Da questa definizione è facile concludere che un tale essere, se è possibile, allora esiste; o piuttosto questa conclusione è un corollario che si trae immediatamente dalla definizione e non ne differisce in nulla.

Perché l'essenza di una cosa non essendo che ciò che fa la sua possibilità in particolare, è manifesto che esistere per la propria essenza, è esistere per la propria possibilità.

La prova ontologica dell'esistenza di Dio in Gödel

Gödel studiò le opere di Leibniz negli anni '40.

Iniziò a lavorare ad una sua versione della prova ontologica nel 1941.

Nel 1970 illustrò a Dana Scott la sua prova.

Dana Scott in base ai suoi appunti presentò la prova in un seminario alla Princeton University nell'autunno del 1970.

Gödel non rese mai pubblica la sua dimostrazione che venne pubblicata postuma nel 1987 e nel 1995 inserita nel terzo volume dei *Collected Works*.

Schema della prova ontologica di Gödel

Gödel si ispirò alla prova ontologica di Leibniz e, utilizzando gli strumenti della logica moderna, diede nuovo impulso alla tradizione iniziata con Anselmo d'Aosta.

Lo schema della prova ontologica di Gödel è il seguente:

Ogni proprietà positiva è necessariamente positiva.

Per definizione Dio ha tutte e solo le proprietà positive.

L'esistenza necessaria è una proprietà positiva.

Quindi Dio, se è possibile, possiede necessariamente l'esistenza.

Il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile.

Quindi Dio è possibile.

Essendo possibile, Dio esiste necessariamente.

Da Aristotele a Gödel

Gödel utilizzò nel suo argomentare la logica modale S5.

Le origini della logica modale risalgono ad Aristotele.

Lo studio dei concetti di necessità e possibilità è proseguito nel medioevo su tematiche teologiche.

In epoca moderna le modalità aletiche sono state un punto fondamentale della riflessione filosofica di Leibniz.

Con Clarence Irving Lewis (1883-1964) si ha la ripresa degli studi della logica modale ai primi del Novecento. Lewis nel capitolo VI del volume intitolato *Symbolic Logic* (1932), assume come primitivo l'operatore di possibilità e sviluppa due sistemi assiomatici che chiama, rispettivamente, S1 e S2; in appendice al volume accenna ad altri sistemi: S3, S4, S5.

Alcune idee centrali di Leibniz riguardo alla modalità vengono riprese nel 1947 da Rudolf Carnap (1891-1970) in *Meaning and Necessity*.

In questo stesso periodo il concetto di necessario come vero di ogni mondo possibile viene arricchito dall'introduzione di una relazione di accessibilità tra mondi che, già prefigurata in alcuni lavori di Alfred Tarski (1902-1983), viene sviluppata da Arthur N. Prior (1914-1969) in rapporto alle logiche temporali e articolata da Stig Kanger, Jaakko Hintikka e Saul Kripke.

Si attribuisce al filosofo e logico americano Saul Kripke, nato nel 1940, il merito di aver dato ampio sviluppo alla semantica a mondi possibili in *A Completeness Theorem in Modal Logic* e *Semantical Considerations on Modal Logic*, scritti negli anni '60.

Logica modale S5

In logica classica vale quanto segue:

Supponiamo che φ e ψ siano proposizioni.

Noi possiamo denotare la negazione di φ con $\sim\varphi$.

La disgiunzione di φ e ψ, ossia φ o ψ, viene denotata da $\varphi \vee \psi$.

La congiunzione di φ e ψ, ossia φ e ψ, viene denotata da $\varphi \,.\, \psi$.

L'implicazione di φ e ψ, ossia φ implica ψ, viene denotata da $\varphi \supset \psi$.

L'equivalenza di φ e ψ, ossia φ è equivalente a ψ, viene denotata da $\varphi \equiv \psi$.

Il quantificatore universale si designa con $\forall$. Il quantificatore esistenziale con $\exists$.

In logica modale si aggiungono due operatori. L'operatore N designa la necessità, $N\varphi$ si legge è necessario che φ.

L'operatore M designa la possibilità, $M\varphi$ si legge è possibile che φ.

Gli assiomi del sistema deduttivo S5 sono, oltre a quelli della logica proposizionale classica, i seguenti:

(Definizione di M in funzione di N) $N\varphi \equiv \sim M \sim \varphi$

(Regola di necessitazione) Se φ è derivabile, allora $N\varphi$ è derivabile

(K) $N(\varphi \supset \psi) \supset (N\varphi \supset N\psi)$

"Se φ è necessariamente vera e da φ segue ψ in ogni circostanza, allora ψ è necessariamente vera"

(T o M) $N\varphi \supset \varphi$

"Se φ è necessaria, allora è vera"

(S4) $N\varphi \supset NN\varphi$

"Se φ è necessaria, allora è necessario che φ sia necessario"

(S5) $M\varphi \supset NM\varphi$

"Se φ è possibile, allora è possibile in ogni circostanza"

Le regole inferenziali di S5 sono:

- Regola di necessitazione: Se φ, allora Nφ.
- *Modus Ponens*: Se $\varphi \supset \psi$ e φ, allora ψ.

La dimostrazione di Gödel

La dimostrazione procede nel seguente modo:

I - Definizione di *proprietà positiva* P(φ)

II - Definizione di *Dio* G(x)

III - Definizione di *relazione di essenza* φ Ess.x

IV - Definizione di *relazione di necessità*

V - Teorema 1: *Se un essere è Dio allora ha l'essenza divina*

VI - Definizione di *esistenza necessaria* E(x)

VII - Teorema 2: *Se Dio è possibile allora esiste necessariamente*

VIII - Dio è possibile

IX - Dio esiste necessariamente.

I - Definizione di *proprietà positiva* P(φ)

(1) P(φ) φ è positivo (o φ ∈ P)

"φ è una proprietà positiva P".

Ad esempio *essere onnipotente*, *essere giusto*, *essere onnisciente*, *essere misericordioso*.

(2) Assioma 1. $P(\varphi) . P(\psi) \supset P(\varphi . \psi)$

Nota 1. E per ogni numero di addendi.

"Se φ e ψ sono proprietà positive, allora anche la congiunzione di φ e ψ è una proprietà positiva".

Ad esempio se *essere onnipotente* è una proprietà positiva e *essere misericordioso* è una proprietà positiva, allora *essere onnipotente e misericordioso* è una proprietà positiva.

La congiunzione di proprietà vale per un numero qualunque di addendi. Quindi è una proprietà positiva, ad esempio, anche *essere onnipotente, giusto e misericordioso*.

(3) Assioma 2. $P(\varphi) \vee P(\sim\varphi)$

Nota 2. Disgiunzione esclusiva.

"Non è possibile che φ e $\sim\varphi$ entrambe proprietà positive o entrambe proprietà non positive".

O una proprietà è positiva o lo è il suo contrario. Se φ non è una proprietà positiva allora $\sim\varphi$ è una proprietà positiva.

Se *essere giusto* è una proprietà positiva allora *essere non giusto* non può essere una proprietà positiva.

II - Definizione di *Dio* G(x)

(4) Definizione 1. $G(x) \equiv (\varphi)\ [\ P(\varphi) \supset \varphi(x)\ ]$ (Dio)

"Un essere x è di natura divina se e soltanto se possiede tutte e sole le proprietà positive φ".

Dio viene definito in base alle proprietà positive. Da Dio viene esclusa ogni negazione ed ogni privazione. Le proprietà di Dio sono solo positive. Si potrebbe definire Dio dicendo che è un essere buono, giusto, onnipotente, onnisciente, misericordioso, ecc.

III - Definizione di *relazione di essenza* φ Ess.x

(5) Definizione 2. $\varphi\ Ess.x \equiv (\psi)\ [\ \psi(x) \supset N(y)\ [\ \varphi(y) \supset \psi(y)\ ]]$ (Essenza di x)

Nota 3. Due qualunque essenze di x sono *necessariamente equivalenti*.

"φ è un'essenza di x (φ Ess.x) se e soltanto se per ogni proprietà ψ di x, esiste necessariamente un y, tale che se y ha la proprietà φ, allora ha la proprietà ψ".

IV - Definizione di *relazione di necessità*

(6) $p \supset Nq = N(p \supset q)$ (Necessità)

"Se p implica necessariamente q allora è necessario che p implichi q".

(7) Assioma 3. $P(\varphi) \supset NP(\varphi)$; $\sim P(\varphi) \supset N \sim P(\varphi)$

"Se una proprietà è positiva allora è necessariamente positiva".

"Se una proprietà non è positiva, allora è necessariamente non positiva".

V - Teorema 1: Se un essere è Dio allora ha l'essenza divina

(8) Teorema. $G(x) \supset G$ Ess. x.

"Se un essere x è di natura divina, allora l'essenza di x è la natura divina G".

VI - Definizione di *esistenza necessaria* E(x)

(9) Definizione 3. $E(x) \equiv (\varphi)\ [\varphi \text{ Ess. } x \supset N\ (\exists x)\ \varphi(x)\ ]$ (Esistenza necessaria)

"x esiste necessariamente, se e soltanto se per ogni elemento essenziale φ di x, necessariamente esiste un x che ha φ".

Ossia "x esiste necessariamente se e soltanto se la sua essenza o ogni suo elemento essenziale esiste necessariamente".

(10) Assioma 4. P(E)

"L'esistenza necessaria è una proprietà positiva".

VII - Teorema 2: Se Dio è possibile allora esiste necessariamente

(11) Teorema 2. $G(x) \supset N(\exists y)\, G(y)$

"Se x è Dio, allora esiste necessariamente".

Quindi

(12) $(\exists x)\, G(x) \supset N(\exists y)\, G(y)$

"Se Dio esiste, allora esiste necessariamente".

Necessitazione di (12):

(12-a) $N\, [(\exists x)\, G(x) \supset N(\exists y)\, G(y)]$

"E' necessario che se Dio esiste, allora esiste necessariamente".

Da (12-a) e da (K) si ottiene:

(13) $M(\exists x)\, G(x) \supset MN(\exists y)\, G(y)$ (M = possibilità)

"Se è possibile che Dio esista, allora è possibile che Dio esista necessariamente".

Da (13) e da (S5) si ottiene:

(13-a) $MN(\exists x)\, G(x) \supset N(\exists y)\, G(y)$

Da (13) e (13-a) si ottiene:

(14) $M(\exists x)\, G(x) \supset N(\exists y)\, G(y)$

"Se è possibile che Dio esista, allora Dio esiste necessariamente".

VIII - Dio è possibile

$M(\exists x)\, G(x)$ significa che il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile.

Questo è vero grazie a:

(15) Assioma 5. $P(\varphi)\, .\, \varphi \supset N\psi\, :\, \supset P(\psi)$

"Se una proprietà positiva φ ne implica necessariamente un'altra ψ, allora anche ψ è positiva".

che implica

(16) x = x è positivo

(17) x ≠ x è negativo.

Ma se un sistema *S* di proprietà positive fosse incompatibile, ciò significherebbe che la proprietà somma *s* (che è positiva) sarebbe x ≠ x.

Gödel usa x ≠ x per significare una proprietà negativa.

Per l'assioma 1 *s* è positivo e vale x = x per *s*. Ma *s* non può essere auto-contraddittorio con se stesso. Se qualcosa non è auto-contraddittorio, allora è possibile. Dunque *S* è possibile.

IX - Dio esiste necessariamente

Da (14) e da (15) per il *modus ponens*:

(18) N(∃y) G(y)

"Dio esiste necessariamente".

Con P(E(x)) ∈ G(x) l'esistenza necessaria di Dio è dimostrata.